La fuerza de la matemática en movimiento: *Mecánica*

II Encuentro Argentino de Mecánica Geométrica
y Física Matemática
La Plata, 11 al 14 de junio 2019

Viviana Alejandra Díaz
viviana.diaz@uns.edu.ar
Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur
Bahia Blanca, Argentina

17 de junio de 2019

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En este curso estudiaremos física y veremos algunas maneras de aplicar técnicas matemáticas como herramientas para hacer física. En particular, estudiaremos el modelo matemático que logramos hacernos de la mecánica teórica.

La historia de la física y la matemática ha estado fuertemente entrelazada: un progreso en una de ellas ha traído un progreso en la otra. Así como la matemática es indispensable para la física; la física puede usarse para producir muchas soluciones sorprendentes y sorprendentemente elegantes en matemática.

La mecánica estudia el movimiento de los cuerpos y sus causas, o bien el equilibrio, es decir, la falta de movimiento. Esta teoría pretende interpretar fenómenos físicos que se observan experimentalmente. Para ello la mecánica parte de unos postulados o principios fundamentales (axiomas), sobre los que se basa la teoría a través de modelos matemáticos. Son afirmaciones que se presuponen evidentes, por lo que no provocan cuestionamientos ni requieren respuesta. Nosotros mencionaremos el *Preprincipio de existencia* que establece que el conocimiento de la mecánica parte del hecho de que existen *cuerpos*, *distancias* y *tiempo*.

La existencia de un cuerpo se manifiesta en la mecánica teórica como un *cuerpo masa*. Todo cuerpo cuyo movimiento es estudiado en mecánica, sin importar cuán pequeño sea o cuánto sea su volumen, tiene su masa. Además cada parte de un cuerpo tiene su masa.

Intuitivamente, definimos el concepto de **masa** como una medida de la cantidad de materia en un objeto. Para medirla, establecemos standards y comparamos las masas desconocidas con estos standards. Como la dirección no tiene sentido al describir la cantidad de materia de un objeto, la masa es una cantidad escalar determinada por un número real positivo m y una unidad de masa. La unidad fundamental de masa es el kilogramo.

La existencia de *distancia* se identifica en todos lados: entre partículas, entre cuerpos celestes, entre varios puntos de una trayectoria en el que se mueve el cuerpo, entre los cuerpos y el lugar de observación, etc. Las posiciones de dos cuerpos, sin importar cuán pequeños sean, no pueden coincidir, sino que la distancia entre ellos debe ser distinta de cero a pesar del hecho aparentemente obvio de que no existe distancia entre dos cuerpos que se tocan. No importa cuán pequeño es un cuerpo, no es un punto. El punto de partida para determinar la distancia debe ser un punto singular de la partícula o del cuerpo en general de manera que la masa completa del cuerpo está concentrada en ese punto que se transforma entonces en un centro de masa ficticio. Por esta razón este punto geométrico dotado de masa se dice el *punto masa* o *punto material*. De esta manera, la distancia entre cuerpos se reduce al concepto de distancia entre puntos.

Respecto al *tiempo* establecemos que es continuo e irrevocable, y en la descripción matemática puede ser representado por un número real $t \in \mathbb{R}$. Una vez que se acepta la existencia de tiempo, se aceptan también la existencia de cambio, de movimiento (cambio de posición en el tiempo), duración, pasado, presente y futuro.

Capítulo 2

Cinemática

La cinemática describe el movimiento, básicamente estudia la trayectoria en función del tiempo sin considerar las causas que originan el movimiento.

2.1. Una partícula simple

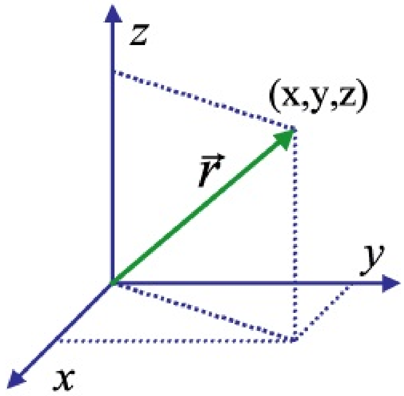
El principal objetivo de la mecánica clásica es describir y explicar el movimiento de objetos macroscópicos actuando bajo fuerzas externas. Para estudiar el movimiento de los cuerpos se han desarrollado en la mecánica modelos físico-matemáticos abstractos como el de **partícula**, que ha surgido como idealización de un cuerpo cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con sus desplazamientos o bien cuya estructura y movimientos internos no son relevantes para un cierto estudio. No existen pues en este sentido verdaderas partículas, son modelos, representaciones ideales de los cuerpos reales. El que unos cuerpos sean o no representables como partículas dependerá del problema específico, ya que un mismo cuerpo podrá o no ser considerado como un cuerpo puntual. Así, en su movimiento alrededor del Sol, la Tierra puede considerarse como una partícula que recorre una trayectoria elíptica, pero no podrá ser considerada como partícula si quiere estudiarse su rotación diaria. Así, podemos definir una partícula como un objeto de tamaño insignificante, donde la validez de esta afirmación depende del contexto, una partícula puede ser un electrón, una pelota de tenis o un planeta.

La diferencia entre un cuerpo y una partícula es que el cuerpo posee masa (cantidad de materia, discutiremos este concepto luego) y dimensiones físicas, las cuales corresponden con la forma de cuerpo: largo, ancho, espesor; mientras que la partícula es la simplificación del cuerpo, ya que tiene su masa pero no posee dimensiones físicas, o sea una partícula es un cuerpo sin dimensiones.

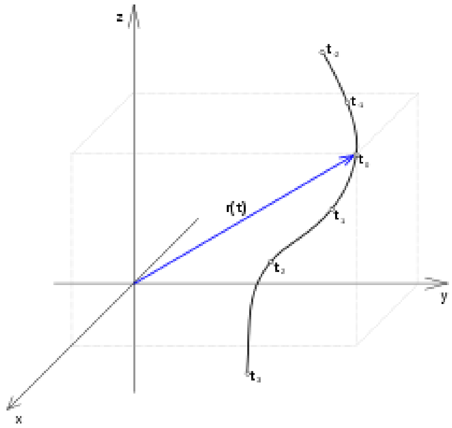
Para describir el movimiento de una partícula, debemos comenzar considerando cómo especificar la ubicación de un punto arbitrario. Esto se realiza dando las coordenadas del punto en un sistema coordenado elegido previamente, llamado el **sistema de referencia o marco de referencia**, respecto del que vamos a describir el movimiento. Cada punto en el espacio está asociado con un conjunto de tres números reales, las coordenadas del punto, y esta asociación es única.

A partir del sistema de referencia elegido, es entonces necesario disponer de una magnitud que nos permita especificar en cada instante, la posición de la partícula respecto del sistema de referencia considerado. Con este propósito, definimos el **vector posición** de la partícula respecto del origen del mencionado sistema, como un vector con extremos en el origen del sistema y en la partícula, y que será en general una función del tiempo que podemos indicar en coordenadas cartesianas como

$$\boxed{\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))}$$



Transcurrido un intervalo de tiempo, el extremo libre (el de la partiícula) del vector posición define un lugar geométrico en el espacio al que llamaremos **trayectoria**, a lo largo de la que se mueve la partícula respecto del sistema de referencia considerado. Es decir, la trayectoria de la partícula es el conjunto de puntos que va describiendo el vector posición en el espacio.

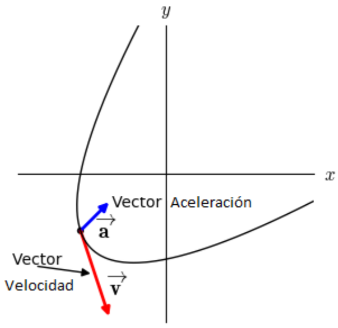


Para disponer de una magnitud que nos permita estimar los cambios temporales observados en el vector posición de una partícula desde el sistema de referencia considerado, definimos el **vector velocidad** de una partícula respecto de dicho sistema. La velocidad de la partícula es un vector tangente a la trayectoria dado por la derivada del vector posición respecto del tiempo

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}}$$

Los cambios temporales del vector velocidad al que hacemos referencia están formalmente expresados con el vector aceleración de la partícula respecto del sistema de referencia en consideración. El **vector aceleración** es la derivada de la velocidad respecto del tiempo

$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t}}$$



Si se conoce como varía la aceleración en función del tiempo para una partícula, y además conocemos su velocidad y posición para un tiempo t_0 (condiciones iniciales), podemos encontrar la velocidad y la posición del cuerpo en función del tiempo con las fórmulas

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{a}(t)\ \mathrm{d}t$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{v}(t)\ \mathrm{d}t$$

Hasta aquí hemos visto como medir el movimiento pero no las razones por las que un objeto se mueve de una cierta manera. Ahora nos ocuparemos de esas razones y veremos por qué cambia el estado de movimiento de un objeto.

2.2. Interacciones

Es claro que convivimos con el cambio, ya sea abrupto como un terremoto o gradual como la edad. Para la ciencia, el cambio es un proceso natural. Observando cuidadosamente, podemos construir modelos o explicaciones que eventualmente nos permitan predecir los cambios. La física describe los cambios en términos de interacciones.

Cuando un objeto influencia a otro, diremos que los dos objetos *interactúan*. Para analizar una interacción, debemos poder ver algunos cambios. Las casas cayendo y los árboles desplazándose nos dicen que dos placas tectónicas han interactuado, por ejemplo. Los cambios entonces nos dan la evidencia de que una interacción ha ocurrido. Medidas de la cantidad de cambio nos permiten ver patrones y construir modelos para predecir futuros cambios.

Como los detalles de una interacción pueden ser extremadamente complejos, nosotros veremos los cambios simplemente comparando el "antes" y el "después", lo que nos permitirá identificar y categorizar las interacciones (una pelota que rueda antes y luego de chocar con un objeto, un huevo que golpea el piso, un auto chocando con un árbol, etc.). Nos restringiremos a interacciones en las cuales ocurre un cambio de velocidad. Un cambio en la posición puede ocurrir sin que ocurra una interacción, solo con que el observador esté en un marco de referencia que se mueve respecto al objeto. Un cambio en la velocidad, sin embargo, implica una interacción.

Dos variables, masa y velocidad, ayudan a describir las diferentes interacciones que observamos.

La velocidad afecta la interacción. Si somos el arquero y atajamos una pelota, la velocidad con que viene la pelota afecta la manera en que nuestras manos la sienten. Lo mismo pasa con un auto que choca contra un árbol, el daño depende de la velocidad con que choque. Y no solo el módulo de la velocidad afecta la interacción, la dirección de la velocidad también está involucrada. No es lo mismo chocar con el auto de frente el árbol que chocar con la cola a igual velocidad.

La masa afecta la interacción. La velocidad por sí misma no explica todas las diferencias que vemos en las interacciones. Una pelota de tenis y una pelota dura, ambas lanzadas con igual velocidad, dejarán distintas impresiones en nuestras manos de arquero. El auto se detendrá si choca de frente con un árbol pero un camión solo disminuirá su velocidad y tirará abajo el árbol, aún cuando las velocidades de choque del auto y el camión sean iguales. La diferencia entre una pelota de tenis y una dura, o entre el auto y el camión, es la masa (cantidad de materia) que tiene cada objeto.

2.3. Momento

Como mencionamos, la masa y la velocidad nos ayudan a describir las diferentes interacciones y el concepto de momento combina los conceptos de masa y velocidad. De hecho, el **momento** (o *cantidad de movimiento*) es la magnitud física definida como el producto de la masa y la velocidad:

$$Momento = masa \ \times \ velocidad \quad , \quad \text{es decir,} \qquad \boxed{\mathbf{p} = m\mathbf{v}}$$

Como la masa es una cantidad escalar y la velocidad una vectorial, el momento está definido como un vector paralelo al vector velocidad, por lo que resulta tangente a la trayectoria de la partícula y cuyo sentido coincide en todo instante con el sentido del movimiento.

Dado que la masa y la velocidad afectan la interacción de dos cuerpos, en algún sentido el momento mide la influencia que un objeto tiene sobre otro en una interacción. La definición cuantitativa de momento nos permite distinguir diferentes descripciones de la interacción, por ejemplo, podemos distinguir interacciones de poca masa y alta velocidad con interacciones de mucha masa y baja velocidad.

Podemos calcular el momento para cualquier objeto, aún si el objeto no interactúa con otro pero si existe interacción con otro, el momento es una concepto muy útil, es la clave que nos permite predecir el resultado de una interacción y describir el estado de movimiento.

2.4. Fuerzas

Ahora introduciremos el concepto de fuerza para explicar el cambio de momento.

Para este concepto tenemos una definición intuitiva. Nuestro cuerpo nos da la sensación de aviso cuando ejercemos una fuerza y cuando una fuerza es ejercida sobre nosotros.

Una **fuerza** es comúnmente definida como un “empuje” o un “tirón”. Fisiológicamente, nosotros detectamos las fuerzas a través de contracciones o extensiones de nuestros músculos (al ejercer una fuerza) y de los impulsos nerviosos de la piel (fuerzas ejercidas sobre nosotros) pero existen fuerzas que no nos involucran (las que ocurren entre otros objetos).

Clases de fuerzas. En todo momento están actuando billones y billones de fuerzas, literalmente. Algunas, como las que nosotros ejercemos cuando empujamos o tiramos de algo, son relativamente simples de identificar. Otras, como la fuerza que el suelo ejerce sobre nosotros, se hace obvia solo cuando no están presentes. Caminar sobre un piso de madera que se rompe nos recuerda que existe algo usualmente que nos empuja cuando caminamos en el piso. Aún otras fuerzas, como la gravedad, no necesitan estar en contacto con un objeto para ejercerse. Los tipos de fuerzas generales que están presentes en nuestro ambiente son:

- Fuerzas de interacciones de contacto: empujes, tirones y fricción. Normalmente podemos identificar los empujes y tirones, la fricción es más fácil de ser pasada por alto pero siempre que dos objetos están en contacto directo, se mueva o esté en reposo, una fuerza friccional actúa entre ellos que se opone al movimiento.

- Fuerzas de interacciones a distancia: gravitacional, eléctricas y nucleares.

Cuando más de una fuerza actúa sobre un objeto, estas fuerzas se combinan para producir una fuerza que llamaremos ***fuerza neta***, que es la suma de todas las fuerzas (que pueden sumarse ya que luego las veremos como vectores) que actúan sobre un objeto. Por esta razón, se dice que las fuerzas satisfacen un *principio de superposición*: la fuerza total sobre una partícula puede hallarse sumando las contribuciones de los diferentes agentes.

La fuerza y el tiempo afectan el cambio de momento. Existe una relación entre la fuerza, el tiempo y el momento, generalizada en la ecuación

$$fuerza \times tiempo = cambio\ de\ momento$$

sugerida por Newton en el siglo 17. Es decir,

- El cambio de momento de un objeto es igual al producto de la fuerza aplicada sobre él y el intervalo de tiempo durante el que la fuerza es aplicada.

Los air bags de los autos están diseñados con este concepto en mente. Cuando un automóvil choca con algún obstáculo, su momento ($masa \times velocidad$) es abruptamente llevado a cero ($velocidad = \mathbf{0}$). Los pasajeros que no tienen cinturón de seguridad chocan con el tablero, el volante o con el parabrisas. Las fuerzas que estos objetos ejercen depende del tiempo de la colisión. Añadiendo relleno al tablero crece ligeramente el tiempo hasta la detención, pero los pasajeros a menudo chocan el parabrisas igual. El air bag está diseñado para proveer protección adicional. En el momento en que un interruptor del auto detecta un cambio repentino en el momento, el air bag se infla y la bolsa parcialmente llena da un lugar blando para parar el movimiento del pasajero gradualmente. Como un largo tiempo hasta detener el movimiento disminuye la fuerza (ya que el cambio de momento es el mismo) que es ejercida sobre el pasajero, el impacto resulta más liviano.

Capítulo 3

Leyes de Newton del movimiento

En esta sección sobrevolaremos las ideas fundamentales de la mecánica clásica establecidas por Isaac Newton (1642-1727), quien atacó los problemas básicos debatidos durante el siglo y desarrolló una nueva área de las matemáticas, que hoy en día conocemos como cálculo infinitesimal, para expresar sus conceptos sobre la mecánica y poder plantear y encontrar solución a los problemas del movimiento de los cuerpos.

Antes vimos cinemática que es el lenguaje que describe el movimiento, ahora estudiaremos la dinámica, es decir, la relación entre el movimiento y las fuerzas que lo causan. Usaremos las nociones de desplazamiento, velocidad y aceleración junto con los conceptos de fuerza y masa, para analizar los principios de la dinámica, los cuales se resumen en las tres leyes de Newton del movimiento.

Estas leyes que son el resultado de una combinación de definiciones, observaciones experimentales de cuerpos en movimiento y varios conceptos intuitivos, son fundamentales en dos sentidos. Primero, no pueden deducirse o demostrarse a partir de otros principios, por medio de manejos lógicos o matemáticos, exclusivamente. Segundo, permiten entender la mayor parte de los movimientos comunes; son la base de la mecánica clásica (o mecánica newtoniana).

Estas tres leyes proveen de una teoría simple para explicar una enorme variedad de observaciones pero, aún así, no son universales; requieren modificación para tamaños muy pequeños (dentro del átomo) y para velocidades muy altas (cercanas a la luz). Así, trataremos con objetos y movimientos restringidos de dos formas: la primera es que los objetos pequeños de los que hablamos no pueden ser "demasiado" pequeños ya que a dimensiones atómicas, la mecánica clásica falla y tiene lugar la mecánica cuántica. La otra restricción es la magnitud de las velocidades involucradas: excluiremos las velocidades muy altas cuyos efectos relativistas sean importantes.

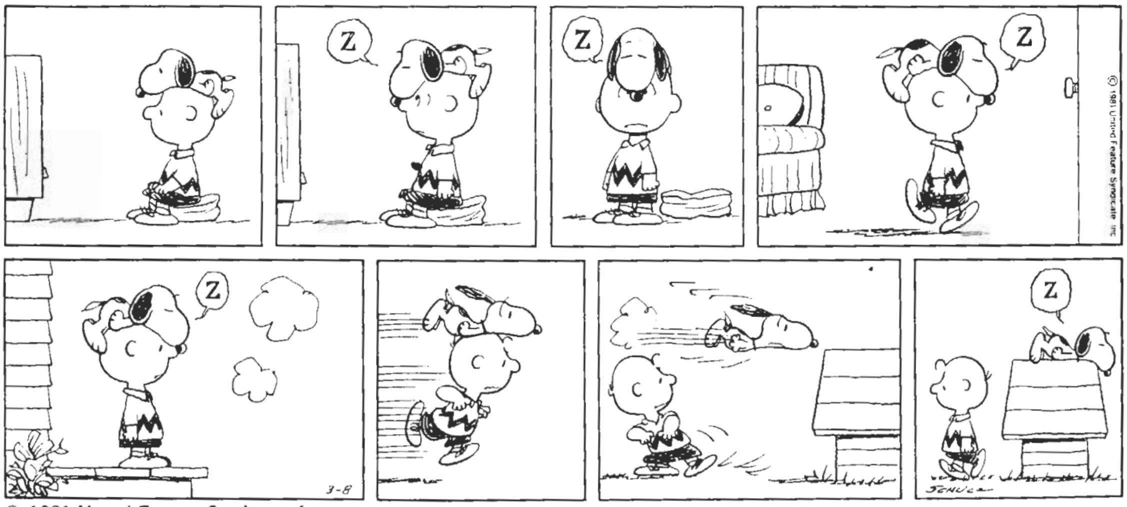
3.1. Primera ley de Newton

Intuitivamente, relacionamos fuerza a movimiento. Si empujamos los pedales de la bicicleta para subir una cuesta o tiramos de un cajón atascado para abrirlo, la fuerza que ejercemos hace que las cosas se muevan. Sin embargo, el movimiento puede ocurrir sin fuerza. A menos que seamos frenados por un cinturón de seguridad, continuaremos moviéndonos cuando el auto frene repentinamente. Las fuerzas actúan sobre el auto pero no sobre nosotros - a menos que golpeemos el parabrisas. Las fuerzas pueden también actuar sin movimiento. Cualquier arquitecto podría decirnos que una variedad de fuerzas actúan sobre un edificio alto, pero afortunadamente este no se mueve. Fuerzas sin movimiento y movimiento sin fuerzas son los temas de la primer ley de Newton.

La primera ley de Newton puede enunciarse como sigue:

- Cuando la fuerza neta que actúa sobre un objeto es cero, la velocidad del objeto permanece constante.

Para sistemas en los que actúan fuerzas pero sus efectos suman cero, la primer ley de Newton cambia las ideas intuitivas de la gente sobre la relación entre fuerza y movimiento.



© 1981 United Feature Syndicate, Inc.

Esta ley fue originalmente enunciada en términos diferentes por Galileo quien introdujo el término *inercia* para describir la tendencia de un objeto a continuar moviéndose en una línea recta a velocidad constante o permanecer estacionario cuando una fuerza neta actúa sobre él. Cuanto más grande sea la inercia de un objeto, más grande será la fuerza necesaria para causar un cambio notable en su movimiento. Consecuentemente, la primer ley de Newton a menudo se conoce como *Ley de inercia.*

Como todos los objetos que se mueven sobre una superficie experimentan una fricción (fuerza que los “empuja” para detenerse), para mantener la bicicleta moviéndose a velocidad constante, debe aplicarse una fuerza empujando los pedales. De hecho, empujamos los pedales para compensar la otra fuerza, la de fricción. Las dos fuerzas, nuestro empuje y la fricción, suman cero, permitiendo a la bicicleta continuar moviéndose a velocidad constante.

Primera ley de Newton y cinturones de seguridad

Los accidentes de auto involucran dos colisiones. La primera ocurre cuando el automóvil golpea un objeto, como una columna de alumbrado. La columna provee la fuerza necesaria para cambiar la velocidad del auto, eventualmente, detenerlo. Una segunda colisión, que ocurre poco después que la primera, involucra a los pasajeros. Si ellos no están de alguna manera ligados al auto, los pasajeros no experimentan la fuerza ejercida por la columna. El auto puede parar, pero los pasajeros continuan moviéndose hacia adelante con velocidad constante. De acuerdo a la primer ley de Newton, su movimiento hacia adelante continuará hasta que ellos experimenten una fuerza. Desafortunadamente, esta fuerza usualmente es ejercida por el tablero o el parabrisas. Sin embargo, los cinturones de seguridad ofrecen una solución ya que al estar el auto y el pasajero conectados, su movimiento es detenido por la misma fuerza al mismo tiempo.

3.2. Segunda ley de Newton

La relación entre fuerza, masa y momento da una definición de fuerza un poco más específica que la de empuje o tirón. Esta definición puede expresarse de varias maneras diferentes pero la más común relaciona la fuerza con la aceleración.

Si utilizamos la primera ley de Newton y el concepto de sistema de referencia inercial, podemos definir una fuerza como una influencia externa o acción sobre un objeto que produce un cambio en su momento o equivalentemente en su velocidad ($p = m\mathbf{v}$ siendo la masa constante), es decir, produce una aceleración respecto a un sistema de referencia inercial.

Así, más formalmente podemos decir que la **fuerza** ejercida sobre un objeto es igual a su masa por su aceleración:

$$Fuerza = masa \times aceleracion \tag{3.1}$$

Entonces la fuerza resulta un vector cuya dirección es la misma que la dirección a la que el objeto acelera. Una fuerza que actúa en la misma dirección que el movimiento del objeto produce una aceleración positiva, el objeto acelera. Una fuerza que actúa en la dirección opuesta produce una aceleración negativa, el objeto se frena. Las fuerzas en otra dirección pueden causar cambios en la magnitud y dirección de la velocidad.

Resulta evidente que el concepto de masa está directamente relacionado con el de inercia, pues mientras mayor es la masa de un cuerpo, mayor es la fuerza que hay que aplicarle para cambiar su estado de movimiento.

Es importante remarcar que la masa y la aceleración describen características del objeto en sí mismo, mientras que la fuerza describe una interacción que ocurre con algún otro objeto. Los objetos no se aceleran ejerciendo fuerzas sobre sí mismos. Otros objetos ejercen fuerzas sobre ellos, causando aceleraciones que pueden predecirse. Algunas veces estos otros objetos son obvios y podemos asociar fuerzas directamente a los objetos involucrados. En otras situaciones vemos que un objeto se acelera e inferimos que una fuerza debe estar presente, aún cuando no sea tan obvio el objeto que ejerce tal fuerza, tal es el caso de la fuerza debida a la gravedad que actúa sobre un objeto cerca de la superficie de la Tierra. La fuerza con la que la gravedad actúa sobre un objeto se llama el **peso** del objeto, y es definido como el producto de la masa del objeto por la aceleración de la gravedad de su ubicación ($9,8\ m/s^2$).

En el caso en que varias fuerzas actúan sobre un objeto, podemos modificar nuestra definición de fuerza de acuerdo al concepto de fuerza neta y sustituirla en (3.1) para obtener la ecuación conocida como **segunda ley de Newton**:

- La fuerza neta que actúa sobre un objeto es igual al producto de la masa del objeto por su aceleración, es decir,

$$Fuerza\ neta = masa \times aceleracion, \quad \text{es decir,} \quad F = m\mathbf{a} \tag{3.2}$$

Esta ecuación relaciona la fuerza neta (cuando no es cero) que actúa sobre un objeto con la masa y la aceleración del objeto, por lo que puede usarse para predecir la aceleración que resulta de una o varias fuerzas actuando sobre un objeto. Esta ley afirma que la fuerza neta actúa en la dirección en la que el objeto acelera y $m\mathbf{a}$ no es una fuerza, sino que es igual en magnitud y dirección a la resultante de todas las fuerzas, o fuerza neta, que actúan sobre el cuerpo.

Esta ley concluye que el movimiento de los cuerpos sigue una simple ley matemática que liga la segunda derivada de la posición a un ente invisible pero real, la fuerza. Matemáticamente, expresamos $\mathbf{F} = m.\mathbf{a} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}$, donde en el caso de que la partícula estuviera sometida a más de una interacción, entonces la fuerza a considerar es la resultante de las fuerzas o fuerza neta a que está sometida dicha partícula, entendiendo por resultante a $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$

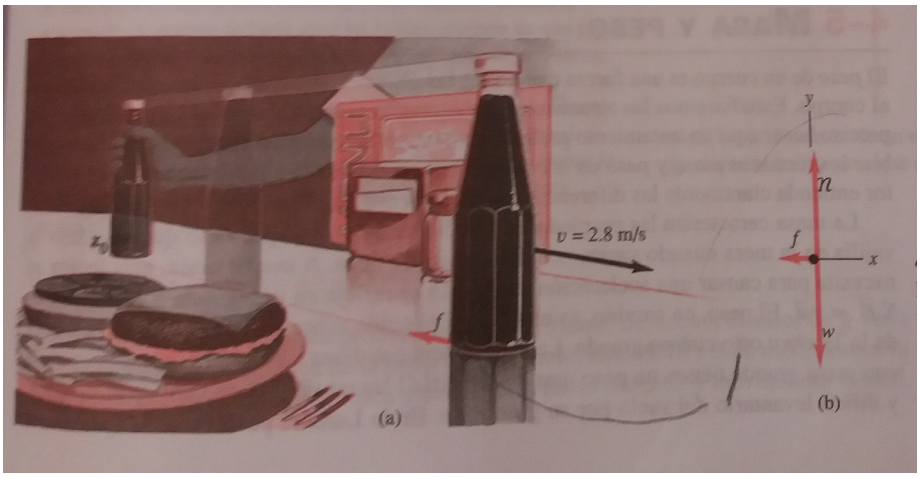
Los teoremas que gobiernan las ecuaciones diferenciales garantizan que dadas la posición y la velocidad en un momento inicial, la ecuación (3.2) puede integrarse para determinar la posición para todo tiempo, es decir, que la solución existe y es única. Este es el objetivo de la dinámica clásica.

Debemos advertir que la ecuación (3.2) solo vale en un marco inercial. Un **marco inercial** se define como un sistema de referencia en el que una partícula libre con masa constante se mueve en una línea recta (con velocidad constante). La primer ley de Newton establece que estos marcos existen. De hecho, un marco de referencia se dice inercial si en él es válida la primera ley de Newton.

Ejemplos de aplicación de la segunda ley de Newton:

1. **Cálculo de fuerza.** Una moza empuja hacia la derecha una botella de gaseosa con masa de 0.45 kg sobre un mostrador horizontal liso. Al soltarla, la botella tiene una velocidad de 2.8 m/s, pero se frena por la fuerza de fricción horizontal constante ejercida por el mostrador. La botella se desliza 1.0 m antes de parar. ¿Qué magnitud y dirección tiene la fuerza de fricción?

   Lo primero es elegir un sistema de coordenadas. Supongamos que la botella se desliza en la dirección positiva de x y la moza la suelta en $x_0 = 0$.



Las fuerzas que actúan sobre la botella son la de contacto con el mostrador, la de fricción y la del peso de la botella. Las de contacto y peso se compensan ya que la botella no tiene movimiento en el eje perpendicular a x. El movimiento es unidimensional. La fuerza de fricción frena la botella, así que su dirección debe ser opuesta a la de la velocidad. Para determinar la magnitud de la fuerza de fricción f con la segunda ecuación de Newton, debemos determinar la aceleración de la botella. Como la fuerza de fricción es constante, también lo es la aceleración ($f = m\ a$). Entonces la velocidad es lineal en el tiempo con pendiente a, simbólicamente

$v = v_0 + a\ t \quad \Rightarrow \quad r = r_0 + v_0\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$ reemplazando t que se despeja de v, y pasando r_0 al miembro izquierdo, multiplicando por $2a$ y simplificando tenemos $v^2 = v_0^2 + 2a(r - r_0)$. Por lo que

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(r - r_0)} = \frac{(0m/s)^2 - (2{,}8m/s)^2}{2(1{,}0m - 0m)} = -3{,}9m/s^2.$$

El signo negativo indica que la aceleración es hacia la izquierda; la velocidad es en la dirección opuesta pues la botella se está frenando. La fuerza neta en la dirección x es la componente $-f$ de la fuerza de fricción, así que

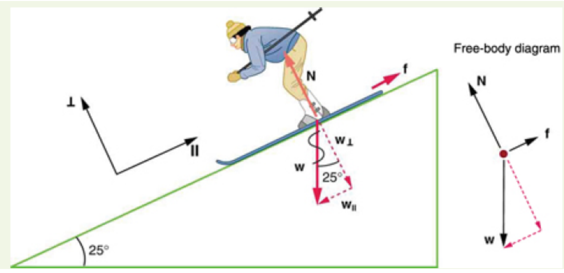
$$\sum F_x = -f = m\mathbf{a} = (0{,}45kg)(-3{,}9m/s^2) = -1{,}8kg.m/s^2 = -1{,}8\,Newtons\ (N = kg.m/s^2)$$

Nuevamente el signo negativo indica que la fuerza sobre la botella está dirigida hacia la izquierda.

2. **Cálculo de aceleración.** Consideremos un esquiador cuya masa, incluyendo el equipo, es de 60 kg que baja por una ladera de 25° .

   a) ¿Cuál es su aceleración si la fricción es despreciable?

   b) ¿Cuál es la aceleración si la fricción es de 45 newtons?



Este es un problema, en principio, tridimensional por estar en el espacio pero el esquiador no se moverá lateralmente en el plano de la ladera de la montaña, por lo que resulta 2-dimensional. Elegiremos un sistema de coordenadas y proyectaremos los vectores en estos dos ejes, creando dos problemas unidimensionales conectados para resolver. El sistema de coordenadas más conveniente para el movimiento en un plano inclinado es uno en el que un eje es paralelo a la ladera y uno perpendicular a ella. Luego, consideraremos dos problemas separados de fuerzas paralelas a la ladera y fuerzas perpendiculares a ella.

Tenemos que la fuerza normal $\mathbf{n}$ es perpendicular a la ladera, y el movimiento y la fuerza de fricción f son paralelas a la ladera, pero el peso $\mathbf{w}$ tiene componentes en ambos ejes que notaremos w_1 y w_2. La fuerza $\mathbf{n}$ es igual en magnitud a w_1, así que no existe movimiento perpendicular a la ladera, pero $\mathbf{f}$ es menor que w_2 pues existe una aceleración hacia abajo de la ladera, es decir, a lo largo del eje paralelo a ella.

Si consideramos el eje 2 paralelo a la ladera y el eje 1 perpendicular a ella, la magnitud de la componente del peso paralela a la ladera es $w_2 = \|\mathbf{w}\| \operatorname{sen}(25°) = mg \operatorname{sen}(25°)$ siendo g la aceleración de la gravedad, y la magnitud de la componente del peso perpendicular a la ladera es $w_1 = \|\mathbf{w}\| \cos(25°) = mg \cos(25°)$.

a) *Despreciando la fricción.* Como la aceleración es paralela a la ladera, necesitamos solo considerar fuerzas paralelas a la ladera (las fuerzas perpendiculares a la ladera suman cero, pues no existe aceleración en esa dirección). La única fuerza paralela a la ladera es la componente w_2 del peso del esquiador. Usando la segunda ley de Newton, tenemos que $a_2 = \dfrac{F_2^{neta}}{m}$, donde $F_2^{neta} = w_2 = mg \operatorname{sen}(25°)$, suponiendo que no hay fricción para esta parte, entonces la aceleración es
$a_2 = \dfrac{F_2^{neta}}{m} = \dfrac{mg \operatorname{sen}(25°)}{m} = g \operatorname{sen}(25°) = (9{,}8\ m/s^2).(0{,}4226)) = 4{,}14\ m/s^2.$

b) *Incluyendo la fricción.* Sabemos que la dirección de la fricción es paralela a la ladera y opuesta al movimiento entre las superficies de contacto. Entonces la fuerza neta es ahora $F_2^{neta} = w_2 - f$, y sustituyendo esto en la segunda ley de Newton, $a_2 = \dfrac{F_2^{neta}}{m}$ da $a_2 = \dfrac{F_2^{neta}}{m} = \dfrac{w_2 - f}{m} = \dfrac{mg \operatorname{sen}(25°) - f}{m}$. Sustituyendo el valor dado de f obtenemos $a_2 = \dfrac{(60{,}0\ kg)(9{,}80\ m/s^2)(0{,}4226) - 45{,}0\ N}{60{,}0\ kg} = 3{,}39\ m/s^2$, que es la aceleración paralela a la ladera cuando existe una fricción de 45,0 Newtons.

3.3. Tercera ley de Newton

Las primera y segunda ley de Newton definen completamente fuerza y describen el movimiento que resulta cuando una fuerza neta actúa sobre un simple objeto. Las fuerzas surgen de interacciones, sin embargo, nuestra discusión no estaría completa sin mirar la interacción completa. La tercera ley de Newton describe las fuerzas sobre todos los objetos involucrados en una interacción.

Una paracaidista que se desploma hacia la tierra abre el paracaídas a una cierta altitud para aumentar la resistencia del aire y reducir su aceleración. Cuando ella choca con el suelo, el suelo ejerce una fuerza hacia arriba sobre ella, abruptamente reduce su momento hacia abajo a cero. Esta fuerza puede ser bastante grande, suficientemente grande para romperle los huesos si la paracaidista cae demasiado rápido. Pero qué sucede con el suelo? Cuando la tierra ejerce una fuerza sobre la paracaidista, la paracaidista ejerce una fuerza sobre la tierra. La tierra es tan masiva que no vemos que cambie su momento, pero vemos una pequeña abolladura o un poquito de pasto aplastado.

Como un ejemplo más sutil, supongamos que empujamos una pared mientras estamos parados en una patineta. Nosotros ejercemos una fuerza relativamente grande sobre la pared, pero la pared no se mueve perceptiblemente. En lugar de eso, nosotros aceleramos hacia atrás.

La pared empuja al skater, y el skater acelera. El skater empuja la pared, y la parece acelera. Generalmente, la pared es mucho más masiva que el skater por lo que no vemos su aceleración. Si reemplazamos la pared por una caja sobre otra patineta, la caja acelerará visiblemente. Cuando el skater empuja la caja, la caja lo empuja hacia atrás.

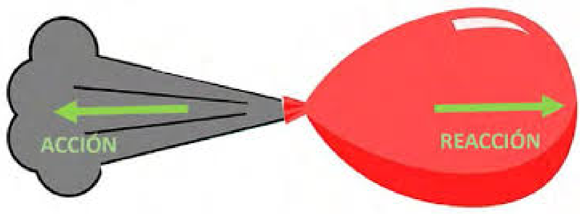
Solo podemos explicar nuestro movimiento diciendo que la pared ejerce una fuerza sobre nosotros. Ambos objetos, nosotros y la pared, ejercemos fuerzas durante la interacción.

Estos dos ejemplos ilustran una importante, pero sutil, característica de la fuerza.

La paracaidista empuja hacia abajo sobre el suelo, el suelo empuja hacia arriba a la paracaidista. La paracaidista ejerce una fuerza sobre el suelo y el suelo ejerce una fuerza sobre la paracaidista. El skater empuja hacia la derecha a la pared, la pared empuja hacia la izquierda al skater. El skater ejerce una fuerza sobre la pared y la pared ejerce una fuerza sobre el patinador. Cuando el skater empuja contra la pared, interactúa con ella. La naturaleza de la interacción requiere que la pared haga algo al skater. Las fuerzas ocurren en pares. Newton estableció esta característica de la fuerza en su **tercera ley**:

- Toda fuerza aplicada resulta en una fuerza de reacción sobre el objeto que la aplica. Esta fuerza de reacción es igual en magnitud pero opuesta en dirección a la fuerza aplicada.

Esta ley también es conocida como *ley de "acción y reacción"*, porque de ella se deduce que a toda acción de un cuerpo sobre otro corresponde una reacción igual y de sentido contrario.



La tercera ley de Newton nos recuerda que una simple interacción resulta en dos fuerzas. Ambos objetos involucrados en la interacción ejercen fuerzas. Las dos fuerzas, sin embargo, actúan sobre diferentes objetos.

Cuando dos objetos interactúan, las fuerzas que ejercen sobre el otro ocurre al mismo tiempo. La tercera ley de Newton no especifica cuál de las dos es la fuerza de acción y cuál es la fuerza de reacción, hasta lo que a la tercera ley de Newton concierne, no existe diferencia. Los pares acción-reacción son simétricos.

3.3.1. El momento se conserva

De todos los resultados que podemos imaginar para cualquier interacción, el resultado experimental muestra que el momento de un sistema (cerrado) permanece constante, es decir, el momento de un sistema es el mismo antes y después de una interacción.

Consideremos un sistema aislado de toda acción externa compuesto por dos partículas de masas m_1 y m_2, respectivamente. Supongamos que las partículas tienen velocidades iniciales $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$, de modo que el momento total inicial del sistema está dado por la expresión $p = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2$.

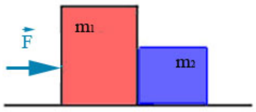
Si las partículas chocan y después de la colisión se separan con velocidades finales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, el momento total final del sistema será: $p = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$. Si tenemos en cuenta que el sistema compuesto por las dos partículas es un sistema aislado, el momento total se debe conservar y las expresiones anteriores deben ser iguales. Por lo tanto, podemos escribir $m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$ o equivalentemente, $m_1\mathbf{v}_1 - m_1\mathbf{u}_1 = -(m_2\mathbf{v}_2 - m_2\mathbf{u}_2)$.

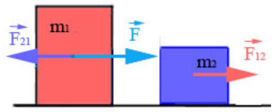
El lado izquierdo de la expresión anterior corresponde al cambio de momento de la partícula de masa m_1, que resulta ser igual al opuesto del cambio de momento de la partícula de masa m_2. Esto nos dice que cuando dos cuerpos chocan intercambian momento, o, de manera equivalente, que el momento que gana un cuerpo lo pierde el otro.

Si dividimos ambos miembros de la última ecuación por Δt, el tiempo que duró la colisión, la ecuación se puede escribir como: $\dfrac{\Delta p_1}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta p_2}{\Delta t}$, y en el límite para $\Delta t \to 0$ tenemos que $\boxed{F_{12} = -F_{21}}$ siendo F_{12} la fuerza que la partícula de masa m_1 experimenta al chocar con la partícula de masa m_2, y F_{21} la fuerza que la partícula de masa m_2 experimenta al chocar con la partícula de masa m_1. Podemos expresar entonces la tercera ley de Newton en los siguientes términos:

- Cuando dos cuerpos chocan las fuerzas que experimentan son iguales y de sentido contrario.

Ejemplo: Dos cajas de 20 y 30 kg de masa respectivamente, están apoyadas sobre una superficie horizontal sin fricción, una apoyada en la otra. Si empujamos el conjunto con una fuerza de 100 N. ¿Cuál es la aceleración de cada masa? ¿Qué fuerza ejercerá cada caja sobre la otra?





De acuerdo con la tercer ley de Newton, sobre la caja 1 actúan las fuerzas $\mathbf{F}$ y $\mathbf{F}_{21}$ en la dirección horizontal, y sobre la caja 2, la fuerza $\mathbf{F}_{12}$ en la misma dirección. Vale que $F_{12} = \|\mathbf{F}_{12}\| = \|\mathbf{F}_{21}\| = F_{21}$.

Aplicando la segunda ley de Newton, $\mathbf{F} = m.\mathbf{a}$ en cada caja, por lo tanto, como el problema es unidimensional tenemos que $F - F_{21} = m_1.a$ y $F_{12} = m_2.a$. Sumando miembro a miembro, $F = (m_1{+}m_2).a \Rightarrow 100 = (20{+}30).a \Rightarrow a = 2\,m/s^2$ y sustituyendo en $F_{12} = m_2.a = 20.2 = 40\ N$ que es la fuerza que ejerce la caja 1 sobre la caja 2. La fuerza que ejerce la caja 2 sobre la caja 1 es igual en módulo y dirección, pero de sentido contrario, es decir, $F_{21} = -40\ N$.

Capítulo 4

Trabajo y energía

Lo que hemos visto, no es suficiente para resolver problemas sencillos si tienen fuerzas variables; por ejemplo, si disparamos una flecha con un arco y queremos calcular su velocidad. En este caso vemos que una vez que soltamos la flecha, la cuerda ejerce una fuerza variable que depende de la posición de la flecha. Para este tipo de problemas se usan las ideas de trabajo y energía.

Diremos que en una zona del espacio o de un medio cualquiera, existe un **campo vectorial**, cuando los puntos del espacio considerado (o del medio) cuentan con una propiedad que puede ser caracterizada mediante una función vectorial de las coordenadas espaciales y del tiempo, esto es, cuando dicha propiedad puede ser caracterizada mediante una función del tipo $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$. En particular, si dicha propiedad no depende explícitamente del tiempo, y por lo tanto solamente depende de las coordenadas espaciales, diremos que estamos en presencia de un ***campo estacionario***, en cuyo caso la función vectorial que caracterizará dicha propiedad quedará expresada formalmente como $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ Así, el estado de movimiento de los diferentes puntos de un fluído que circula a lo largo de un canal de paredes rígidas puede ser caracterizado mediante el vector velocidad de cada uno de dichos puntos, en cuyo caso diremos que estamos en presencia de un ***campo de velocidades***, que si no cambia con el tiempo podremos caracterizar mediante una función vectorial del tipo $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{r})$.

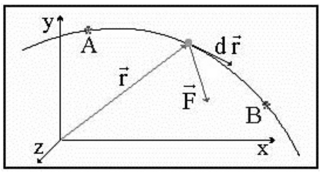
En general, diremos que en una zona del espacio existe un ***campo de fuerzas***, cuando los puntos del espacio (o eventualmente del medio considerado) tienen la propiedad de ejercer fuerzas sobre partículas en dichos puntos (como consecuencia de algún mecanismo de interacción presente) que puedan ser caracterizadas mediante funciones vectoriales, dependientes del mecanismo de interacción, como $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ (caso no estacionario), $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ (caso estacionario).

De manera semejante, el fenómeno de interacción gravitatorio puede ser pensado como que ante la presencia de materia, los puntos del espacio que la rodean adquieren la propiedad de ejercer fuerzas sobre partículas en dichos puntos, las que pueden ser caracterizadas mediante una función vectorial del tipo $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$ en cuyo caso diremos que estamos en presencia de un ***campo de fuerzas gravitatorias***.

En particular, diremos que un campo de fuerzas es ***constante*** cuando la función que lo caracteriza no depende explícitamente del tiempo ni de las coordenadas espaciales, es decir, cuando puede ser expresado como $\mathbf{F} = \mathbf{K}$ (en coordenadas cartesianas $\mathbf{F} = k_x\mathbf{i} + k_y\mathbf{j} + k_z\mathbf{k}$).

4.1. Trabajo mecánico

Consideremos el caso de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria sometida a un campo de fuerza estacionario (que es la resultante de las fuerzas de interacción) $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$.



Bajo estas condiciones definiremos el **trabajo mecánico** que el campo de fuerzas realiza sobre la partícula a lo largo de la trayectoria, que notaremos W, entre los puntos A y B de la misma como:

$$\boxed{W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r}}$$

En general, debemos esperar que el trabajo mecánico realizado por un campo de fuerza, dependa de la trayectoria a lo largo de la cual se lo calcula.

4.2. Energía cinética

Suponiendo que el sistema de referencia involucrado es un *sistema inercial* (y la masa constante) y teniendo en cuenta la segunda ley de Newton, el trabajo puede expresarse como

$$W = \int_A^B m\mathbf{a}\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_A^B m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}\ \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\mathbf{v}\ \mathrm{d}\mathbf{v} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2\Big|_{v_A}^{v_B}, \quad \text{de donde resulta que}$$

$$W = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_A^2 \ (\textit{Teorema de las fuerzas vivas}).$$

Por lo tanto, cuando las velocidades están determinadas respecto de un sistema de referencia inercial, entonces el trabajo mecánico realizado por la resultante de las fuerzas de interacción estará directamente vinculado con los cambios observados en la función:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2}$$

que en adelante identificaremos como la función **Energía Cinética**. Así vemos que el trabajo realizado es igual al cambio en la energía cinética. También podemos afirmar que la energía cinética de una partícula es el trabajo requerido para incrementar su velocidad desde el reposo hasta un cierto valor, con respecto a un marco de referencia inercial.

4.3. Energía potencial

Diremos que un campo de fuerzas es un ***campo conservativo*** (o *fuerza conservativa*) si depende solo de la posición en lugar de la velocidad y es tal que el trabajo mecánico realizado por dicho campo es independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcula. En particular, para un camino cerrado, el trabajo realizado por la fuerza conservativa se anula:

$\oint \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{r} = 0$, y esta propiedad implica que la fuerza puede escribirse como $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V(\mathbf{r})$, donde esa función escalar $V(\mathbf{r})$ de las coordenadas espaciales asociada al campo de fuerza considerado se llama función **Energía Potencial**. Esta función es la energía asociada a la posición de un sistema, no a su movimiento (como la cinética).

La función energía potencial no está unívocamente definida sino que está definida a menos de una constante arbitraria pero en general estamos interesados en la diferencia de dicha función entre dos estados determinados, por lo que típicamente se le asigna el valor nulo a la constante. Aceptando estas condiciones, en adelante podremos referirnos sin ambigüedades a la función energía potencial asociada con un determinado campo de fuerza.

4.4. Conservación de la energía mecánica

Cuando tenemos una fuerza conservativa, necesariamente tenemos una *ley de conservación para la energía.* Para ver esto, recordemos la fórmula para el trabajo

$$W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_B^2 - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_A^2 = T_B - T_A \tag{4.1}$$

y, por otro lado, $W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r} = -\int_A^B \nabla V(\mathbf{r}).\mathrm{d}\mathbf{r} = -V_B + V_A$. Así, tenemos que $T_B - T_A = -V_B + V_A$ y reagrupando podemos escribir $T_A + V_A = T_B + V_B := E$. Luego,

$$\boxed{E = T + V}$$

es también una constante de movimiento que se denomima la ***Energía Mecánica*** del sistema.

Podemos enunciar el ***Teorema de conservación de la energía mecánica*** como sigue.

- Si el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas no conservativas es nulo o bien si la totalidad de las fuerzas actuantes son conservativas, entonces la energía mecánica del sistema permanecerá constante, e igual al valor que tenía en el instante inicial.

En efecto, si consideramos el caso de una partícula sometida a la interacción con diferentes campos de fuerza, conservativos (cuya resultante identificaremos con $\mathbf{F}_c$) y no conservativos (cuya resultante identificaremos con $\mathbf{F}_{nc}$), entonces por (4.1) es claro que $\int_A^B (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{nc}).\mathrm{d}\mathbf{r} = T_B - T_A$ entonces $-(V_B - V_A) + \int_A^B \mathbf{F}_{nc}.\mathrm{d}\mathbf{r} = T_B - T_A$ de donde $\int_A^B \mathbf{F}_{nc}.\mathrm{d}\mathbf{r} = (T_B + V_B) - (T_A + V_A)$.

Como la energía es $E = T + V$, es claro que la ecuación anterior puede expresarse en términos de esta magnitud, como $E_B - E_A = \int_A^B \mathbf{F}_{nc}.\mathrm{d}\mathbf{r}$ expresión que nos muestra a los cambios observados en la energía mecánica de un sistema están directamente vinculados con el trabajo mecánico que realizan las fuerzas NO conservativas a que se ve sometido.

Es oportuno destacar que la conservación de la energía mecánica de ninguna manera implica la conservación de las energías cinética y potencial de una partícula. Implica la conservación de la suma de ambas magnitudes y, por lo tanto, un incremento en una de ellas deberá estar acompañado necesariamente de una disminución en la otra.

Capítulo 5

Mecánica Lagrangiana

Nuevas perspectivas de las ideas de Newton describen los avances que tuvieron lugar en los 150 años siguientes a Newton cuando las leyes de movimiento fueron reformuladas usando técnicas más poderosas e ideas desarrolladas por algunos de los gigantes de la física matemática como Euler, Lagrange, Hamilton y Jacobi.

Si se resuelven las ecuaciones de Newton, se conoce el movimiento pero existen casos en los que no se conocen todas las fuerzas que intervienen en el movimiento, es decir, no se conocen específicamente las ecuaciones de Newton. Para estos casos es que surge el formalismo de Lagrange de la mecánica.

Parte del poder de la formulación Lagrangiana sobre el enfoque Newtoniano es que se deshace de los vectores en favor de coordenadas más generales.

En tres dimensiones un punto puede especificarse con coordenadas rectangulares (x, y, z), o coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) o coordenadas esféricas (r, θ, ϕ), o muchas otras que pueden usarse para propósitos específicos. Ahora no vamos a pensar en ninguna clase de sistema de coordenadas en particular, sino que pensaremos en **coordenadas generalizadas**, que pueden ser longitudes, ángulos o combinaciones de ellos. Reciben este nombre para indicar que no importa su naturaleza. Notaremos a estas coordenadas $(q_1, q_2, q_3, ...)$. Si consideramos una partícula simple en el espacio tridimensional, habrá tres de ellas, que pueden ser rectangulares, cilíndricas, esféricas, etc. Si consideramos N partículas, necesitaremos $3N$ coordenadas para describir el sistema (a menos que existan restricciones sobre el sistema). Reescribamos las posiciones de N partículas con coordenadas $\mathbf{r}_j$ $(1 \leq j \leq N)$ como q_i donde $i = 1, ..., 3N$. El número de **grados de libertad** del sistema se dice que es $3N$. Estas coordenadas parametrizan un espacio $3N$-dimensional conocido como **espacio de configuración**. Cada punto de este espacio de configuración especifica una configuración del sistema (es decir, las posiciones de las N partículas). La evolución temporal de las posiciones da una curva en el espacio de configuración.

Definimos el **Lagrangiano** como una función de las posiciones $q_i(t)$ y las velocidades $\dot{q}_i(t)$ de todas las partículas, dado por

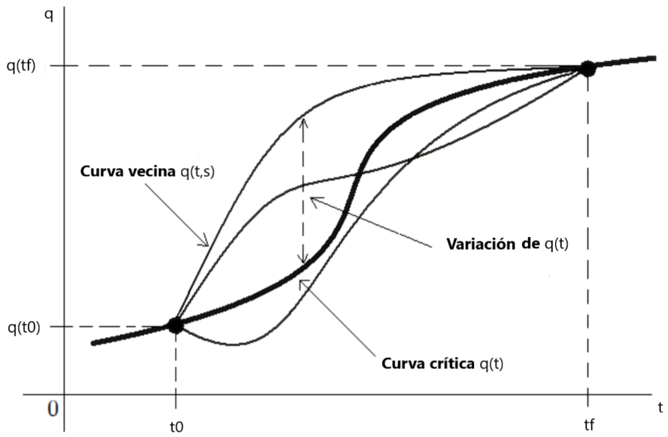
$$\boxed{L(q_i, \dot{q}_i) = T(\dot{q}_i) - V(q_i)} \tag{5.1}$$

donde $T = \dfrac{1}{2}\sum_i m_i(\dot{q}_i)^2$ es la energía cinética y $V(q_i)$ es la energía potencial.

5.1. El principio de Hamilton

Para simplificar la notación suprimiremos el subíndice i en q_i y solo escribiremos q.

Con el fin de describir el principio de Hamilton, consideremos una curva particular $q(t)$ y una familia de curvas $q(t,s)$ para $|s| < \varepsilon$ que satisfacen que $q(t,0) = q(t)$, $q(t_0,s) = q(t_0)$ y $q(t_f,s) = q(t_f)$ para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (es decir, una familia de curvas suaves con iguales extremos que difieren en pequeñas variaciones).



De todas estas posibles trayectorias, solo una es la verdadera trayectoria que toma el sistema. ¿Cuál es?

Definimos una **acción**, que notamos S, que asigna a una curva un número real, como sigue

$$S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t))\ \mathrm{d}t$$

Esta acción es un funcional (es decir, una función de la trayectoria que es en sí misma una función).

Definimos la *primer variación de la acción*, que representa el cambio en la acción cuando la curva varía, como

$$\delta S[q(t)] = \delta \int_{t_0}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t))\ \mathrm{d}t := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int_{t_0}^{t_f} L(q(t,s), \dot{q}(t,s))\ \mathrm{d}t$$

Entonces en estas condiciones vale el siguiente resultado.

Teorema 5.1.1 ***Principio de Hamilton (o de acción estacionaria o crítica).*** *La trayectoria "real" tomada por el sistema es un valor crítico de la acción S, esto es, una curva $q(t)$ que anula la primera variación de la acción.*

Dem:

Veamos cuáles son las curvas críticas de la acción, es decir, qué condiciones satisfacen las curvas que anulan la primer variación de S. Planteamos el cambio en la acción igual a cero y trabajamos la ecuación.

$$\delta S[q(t)] = \delta \int_{t_0}^{t_f} L(q(t), \dot{q}(t))\ \mathrm{d}t = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \int_{t_0}^{t_f} L(q(t,s), \dot{q}(t,s))\ \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_f} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} L(q(t,s), \dot{q}(t,s))\ \mathrm{d}t,$$

derivando bajo el signo de integral. Así,

$$\delta S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} q(t,s) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}(t,s)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \dot{q}(t,s) \right) \mathrm{d}t. \tag{5.2}$$

Si notamos $\delta q(t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big|_{s=0} q(t,s)$, tenemos que

$$\delta S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q} \right) \mathrm{d}t.$$

Claramente, para que $\delta S = 0$ es suficiente que $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$ y $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$; sin embargo, esta no es una condición necesaria ya que las funciones δq y $\delta \dot{q}$ no son independientes. Notemos que puede cambiarse el orden de las derivadas de q y obtener

$$\delta \dot{q}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \dot{q}(t,s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q(t,s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0} q(t,s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q(t,s).$$

Así los términos con $\delta \dot{q}$ pueden ser integrados por partes

de la siguiente manera $\displaystyle\int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta \dot{q}\ \mathrm{d}t = \int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta q\ \mathrm{d}t = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q - \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\ \mathrm{d}t$ y la ecuación (5.2) se transforma en

$$\delta S[q(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) \right) \delta q\ \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\right]_{t_0}^{t_f}.$$

Pero el último término se anula pues los extremos de las curvas son fijos, es decir, tales que $\delta q(t_0) = \delta q(t_f) = 0$.

De esta manera, tenemos que el requerimiento de que la acción tenga un valor crítico, o equivalentemente que $\delta S[q(t)] = 0$ para todo cambio en la trayectoria $\delta q(t)$, se verifica si y solo si

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = 0} \tag{5.3}$$

Estas ecuaciones (5.4) son las conocidas como **ecuaciones de Lagrange** o **ecuaciones de Euler-Lagrange**.

Volviendo a la notación de subíndices para coordenadas generalizadas $q_i(t)$ para $i = 1, ..., 3N$, las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0 \tag{5.4}$$

para cada $i = 1, ..., 3N$.

Así, vemos que la acción S es estacionaria o tiene un valor crítico (es decir $\delta S = 0$) en una curva q si y solo si q satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Para finalizar la demostración, necesitamos solo mostrar que estas ecuaciones de Lagrange son equivalentes a las de Newton.

De la definición del Lagrangiano 5.1, tenemos que $\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$, mientras que $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} = p$. Así, las ecuaciones de Euler-Lagrange afirman que $-\frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p = \dot{p}$. Pero sabemos que $p = m\dot{q}$

y que $F = -\nabla V = -\dfrac{\partial V}{\partial q}$, entonces las ecuaciones de Lagrange establecen que $F = m\ddot{q}$ que es exactamente la segunda ecuación de Newton.

Luego vemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange (5.4) son equivalentes a la segunda ecuación de Newton. Es decir, las curvas que satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange (las trayectorias críticas de la acción) son las que satisfacen la segunda ecuación de Newton (son las trayectorias reales). ■

Ejemplo: Volvamos al problema del esquiador sin rozamiento. Supongamos que deseamos hallar la ecuación de movimiento de Lagrange del sistema y la aceleración del esquiador a lo largo de la ladera.

En coordenadas cartesianas ($q_1 = x,\ q_2 = y$, ya vimos que no existe movimiento en z), la energía cinética del sistema está dada por $T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$. La energía potencial en este ejemplo es la energía potencial gravitatoria (por tratarse de un cuerpo con masa) y está dada por el producto de la masa por la aceleración de la gravedad y por la altura a la que está situada la masa sobre la superficie terrestre. De esta manera tenemos que, fijado el origen del marco de referencia en el vértice del ángulo recto del triángulo que forma la ladera con el suelo, la energía potencial es $V = mgy$. Entonces el Lagrangiano del sistema está dado por
$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$.

Ahora consideraremos la relación (lineal) entre ambas dimensiones x e y dado que el esquiador está obligado a moverse en la ladera, que nos conduce a un sistema con solo un grado de libertad por lo que el número mínimo de coordenadas generalizadas que se necesitan para conocer la posición en cada instante del esquiador es uno. Como la pendiente de la recta de la ladera en el plano XY está dada por la relación $\tan(25°) = \dfrac{y}{-x}$ y así, si elegimos a x como coordenada generalizada, escribimos $y = -x.\tan(25°) = -0{,}466\ x$. Ahora sustituímos esta expresión en el Lagrangiano para obtener

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + (-0{,}466\ \dot{x})^2) - mg(-0{,}466\ x) = \frac{1}{2}m\ 1{,}217\ \dot{x}^2 + 0{,}466\ mgx.$$

Entonces tenemos que $\quad \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0{,}466\ mg, \quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 1{,}217\ m\dot{x} \quad$ y $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 1{,}217\ m\ddot{x}.$

Así, las ecuaciones de Lagrange $\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad$ resultan en la ecuación $1{,}217\ m\ddot{x} - 0{,}466\ mg = 0$ y entonces $\ddot{x} = \dfrac{0{,}466\ g}{1{,}217} = 0{,}383\ g$ que es la ecuación de movimiento de Lagrange del sistema para la coordenada generalizada x.

La ecuación para la aceleración en y se obtiene derivando dos veces la expresión $y = -0{,}466\ x$ con respecto al tiempo para obtener $\ddot{y} = -0{,}466\ddot{x} = -0{,}178\ g$. Entonces la aceleración a lo largo de la ladera viene dada por $a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{(0{,}383\ g)^2 + (0{,}178\ g)^2}$, es decir, $a = 0{,}422\ g = 4{,}141$ que es el resultado que obtuvimos al aplicar la segunda ley de Newton.

Es importante notar que este método no permite encontrar, por ejemplo, la fuerza o fuerzas que mantienen unido al esquiador a la superficie de la ladera.

Como en este caso, a veces las ecuaciones de Lagrange no son tan útiles como las de Newton para obtener algunas fuerzas (por ejemplo de fricción o de tensión) pero existen dos muy importantes razones para trabajar con las ecuaciones de Lagrange en lugar de con las de Newton. El primero es que las ecuaciones de Lagrange valen en cualquier sistema de coordenadas. De hecho, sigue inmediatamente del principio de Hamilton que es una afirmación sobre trayectorias y no sobre coordenadas. Esto se contrasta con las ecuaciones de Newton que solo se verifican en un marco inercial. La segunda razón es la facilidad con la que pueden tratarse las restricciones en los sistemas Lagrangianos.

Capítulo 6

Formalismo Hamiltoniano

En la formulación Lagrangiana tenemos la función $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$, donde $q_i(t)$ son n coordenadas generalizadas, que contiene toda la información del sistema y las ecuaciones de Lagrange del movimiento son n ecuaciones diferenciales de segundo orden que requieren $2n$ condiciones iniciales, digamos $q_i(0)$ y $\dot{q}_i(0)$.

La idea básica del enfoque Hamiltoniano es tratar de colocar a $q_i(t)$ y $\dot{q}_i(t)$ en una base más simétrica, en un plano de "igualdad". Más precisamente, trabajaremos con los n **momentos generalizados**

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{6.1}$$

para $i = 1, ..., n$, y así $p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j, t)$.

Si reescribimos las ecuaciones de Lagrange (5.4) usando la definición 6.1 del momento, entonces se transforman en la ecuación

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}.$$

El plan será eliminar de la formulación los $\dot{q}_i$ en favor de los momentos p_i, y entonces tener a q_i y p_i en una base de igualdad.

Recordemos que $\{q_i\}_{i=1}^n$ define un punto en un espacio de configuración n-dimensional. La evolución temporal es una curva en el espacio de configuración. Sin embargo, el **estado** del sistema está definido por $\{q_i\}_{i=1}^n$ y $\{p_i\}_{i=1}^n$ ($\equiv \ \{v_i\}_{i=1}^n$) en el sentido que esta información permitirá determinar el estado en todo tiempo futuro. El par $\{(q_i, p_i)\}_{i=1}^n$ define un punto en el llamado **espacio de fase** $2n$-dimensional. Decimos que la evolución está gobernada por un **flujo** en el espacio de fase (el equivalente a una trayectoria pero en el espacio de $\{q_i\}_{i=1}^n$ y $\{p_i\}_{i=1}^n$).

6.1. La transformada de Legendre

Deseamos hallar una función en el espacio de fase que determine la única evolución de q_i y p_i. Esta debe ser una función de q_i y p_i (y no de $\dot{q}_i$) y debe contener la misma información que el Lagrangiano $L(q_i, \dot{q}_i, t)$.

Existe un "truco" matemático para hacer esto que se conoce como *transformada de Legendre.*

Para describirla, consideremos una función arbitraria $f(x, y)$ con derivada total $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$. Ahora definimos una función $g(x, y, u) = ux - f(x, y)$ que depende de tres variables x, y y u con derivada total $\mathrm{d}g = \mathrm{d}(ux) - \mathrm{d}u = u\mathrm{d}x + x\mathrm{d}u - \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x - \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.

En este punto, u es una variable independiente pero supongamos que la elegimos siendo una función específica de x e y definida por $u(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$. Entonces tenemos que $\mathrm{d}g = x\mathrm{d}u - \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ o, en otras palabras, g puede ser pensada como una función de u e y, por lo que escribimos $g(u, y)$. Si deseamos una expresión explícita para $g(u, y)$, debemos primero invertir la expresión de $u(x, y)$ para obtener $x = x(u, y)$ y entonces sustituir x en la definición de g de manera que g puede escribirse como

$$g(u, y) = ux(u, y) - f(x(u, y), y).$$

Esta es la conocida como **transformada de Legendre** que nos lleva de una función $f(x, y)$ a una función $g(u, y)$ donde $u = \partial f/\partial x$.

El punto clave es que no hemos perdido información. En efecto, podemos recuperar siempre $f(x, y)$ de $g(u, v)$ notando que $\left.\dfrac{\partial g}{\partial u}\right|_y = x(u, y)$ and $\left.\dfrac{\partial g}{\partial y}\right|_u = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ que nos asegura que la transformada de Legendre inversa $f = \dfrac{\partial g}{\partial u}u - g$ nos llevará de vuelta a la función original.

6.2. Ecuaciones de Hamilton

Las ecuaciones de Hamilton constituyen otra manera de expresar las ecuaciones dinámicas del movimiento y son el doble de ecuaciones que en el caso de Lagrange pero son ecuaciones de primer orden.

El Lagrangiano $L(q_i.\dot{q}_i, t)$ es una función de las coordenadas q_i, sus derivadas temporales $\dot{q}_i$. Definimos el **Hamiltoniano** o **función Hamiltoniana** como la transformada de Legendre del Lagrangiano con respecto a las variables $\dot{q}_i$, es decir

$$H(q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)$$

donde $\dot{q}_i$ es eliminada del lado derecho en favor de p_i usando que $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q_j, \dot{q}_j)$ e invirtiendo para obtener $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j)$.

Ahora, si calculamos el diferencial de H obtenemos

$$\mathrm{d}H = (\mathrm{d}p_i\dot{q}_i + p_i\mathrm{d}\dot{q}_i) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\mathrm{d}\dot{q}_i\right) = \mathrm{d}p_i\dot{q}_i - \frac{\partial L}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i$$

pero a partir de la definición de H sabemos que esto puede reescribirse como

$$\mathrm{d}H = \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathrm{d}q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i.$$

Entonces, recordando que $\dot{p}_i = \dfrac{\partial L}{\partial q_i}$ e igualando términos obtenemos

$$\begin{cases} \dot{p}_i & = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i} \\ \\ \dot{q}_i & = \dfrac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases}$$

que son las conocidas como **ecuaciones de Hamilton**.

Hemos reemplazado n ecuaciones diferenciales de segundo orden de Lagrange para q_i y $\dot{q}_i$, por las $2n$ ecuaciones diferenciales de Hamilton de primer orden para q_i y p_i.

Ejemplo: Volvamos a nuestro ejemplo y escribamos las ecuaciones de Hamilton para el problema del esquiador sin rozamiento.

El Lagrangiano del sistema era $L = \frac{1}{2}m\ 1{,}217\ \dot{x}^2 + 0{,}466\ m\mathbf{g}x$. Para escribir el Hamiltoniano necesitamos conocer el momento generalizado p que, en este caso, está dado por $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 1{,}217\ m\dot{x}$. Luego, $\dot{x} = \dfrac{p}{1{,}217\ m}$ y así la función Hamiltoniana está dada por

$$H(x,p) = p\ x - L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2{,}434\ m}p^2 - 0{,}466\ m\mathbf{g}x$$

Entonces podemos escribir las ecuaciones de Hamilton como sigue.

$$\begin{cases} \dot{p} & = 0{,}466\ m\mathbf{g} \\ \\ \dot{x} & = \dfrac{2}{2{,}434\ m}p \end{cases}$$

De aquí, tenemos que $\ddot{x} = \dfrac{0{,}82}{m}\dot{p} = 0{,}82\ (0{,}466)\ g = 0{,}382\ g$ que es igual al resultado de la aceleración en x que obtuvimos al plantear el problema con las ecuaciones de Lagrange.

Capítulo 7

Bibliografía

1) Classical Dynamics, David Tong, University of Cambridge, 2005.
2) Classical Mechanics, H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, Pearson, 3rd. Edition, 2001.
3) Mechanics, L. Landau an E. Lifshitz, 3rd. Edition, Butterworth-Heinemann, 1976.
4) Mathematical Methods of Classical Mechanics, V. I. Arnold, Springer, 2nd. Edition, 1997.
5) Dinámica Clásica, L. Ochoa, Ediciones Qualucrom, 1994.
6) The fascination of physics, Jacqueline D. Spears and Dean Zollman, Benjamin/Cummings Publishing Co., 1990.
7) Física Universitaria, Volumen 1, F. Sears, M. Zemansky, H. Young y R. Freedman, Addison Wesley, novena edición, 1999.